Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου (παλαιό & νέο σύστημα)

ΘΕΜΑ Α

A$_1$. Θεωρία

A$_2$. Θεωρία

A$_3$. Θεωρία

A$_4$. **α→Λ, β→Σ, γ→Λ, δ→Σ, ε→Σ**

ΘΕΜΑ Β

B$_1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=0$.

B$_2$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(x^2+1\right)\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

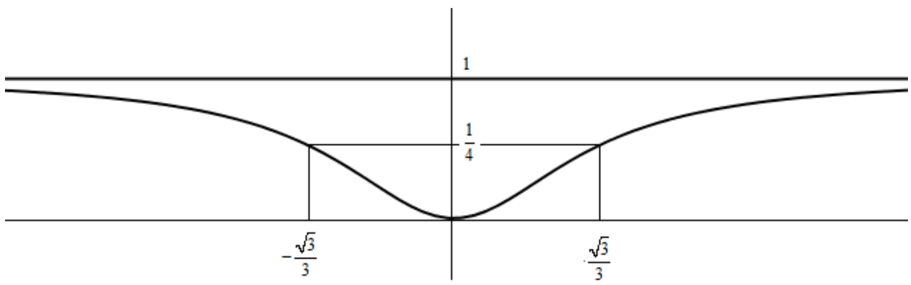
	$-\infty$	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	κοίλη		κυρτή		κοίλη

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

B$_3$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών, η Cf δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$, όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, επομένως η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στα $-\infty$, $+\infty$.

B$_4$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Έστω g με $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\mathbb{R}$ το $g(0)=0$, επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Γ₂. $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\overset{\Gamma_1}{\Leftrightarrow}|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Επειδή από το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$. Επομένως

Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$$

Αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε

$$f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x<0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\end{cases}$$

Γ₃. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$ και

$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Γιατί: για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2\geq 0\Rightarrow e^{x^2}\geq 1\Rightarrow 2e^{x^2}\geq 2$ (1) και $4x^2e^{x^2}-2\geq -2$ (2) άρα (1),(2)$\Rightarrow f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ₄. Έστω η συνάρτηση h με $h(x)=f(x+3)-f(x),\ x>0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ως κυρτή τότε για κάθε $x>0$ ισχύει $x+3>x\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow h'(x)>0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1 – 1.

Οπότε: $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|)=h(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow|\eta\mu x|=x\Leftrightarrow x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow -\int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\cancel{\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx}+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\cancel{\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx}=\pi$

$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ (1)

Επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$.

Άρα, από τη σχέση (1) είναι $f(\pi)=\pi$.

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1.$

Δ₂. **α.** Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζουμε τη σχέση που έχει δοθεί και έχουμε: $f'(x)e^{f(x)}+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε από το θεώρημα του Fermat είναι $f'(x_0)=0$. Από τη σχέση (1) για $x=x_0$ έχουμε

$\cancel{f'(x_0)e^{f(x_0)}}+1=\cancel{f'(f(x_0))f'(x_0)}+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$ που είναι άτοπο αφού $f'(0)=1$.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=1>0$, τότε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ₃. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Για κάθε $x>0$ είναι: $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\frac{2}{f(x)}\Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$

και επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Δ₄. Θέτουμε $\ln x=u$, τότε $\frac{1}{x}dx=du$ και $x=1\Rightarrow u=0$, $x=e^{\pi}\Rightarrow u=\pi$, τότε

$\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi} f(u)du$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$ άρα

$f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(u)\le\pi$ και η ισότητα ισχύει για $u=0$ ή $u=\pi$

άρα $0<\int_0^{\pi} f(u)du<\int_0^{\pi}\pi du=\pi^2$.