Απαντήσεις στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Εσπερινά 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **α** $\rightarrow$ **Λ** **β** $\rightarrow$ **Σ** **γ** $\rightarrow$ **Λ** **δ** $\rightarrow$ **Σ** **ε** $\rightarrow$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2-4z-4\overline{z}+16=4|z|^2-4z-4\overline{z}+4 \Leftrightarrow 3|z|^2=12 \Leftrightarrow |z|=2$,

επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Β2. **α)** $|z_1|=|z_2|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=|z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=z_2\overline{z}_2=4$ (1)

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\overset{(1)}{=}\frac{2\frac{4}{\overline{z}_1}}{\frac{4}{\overline{z}_2}}+\frac{2z_2}{z_1}=\frac{2\overline{z}_2}{\overline{z}_1}+\frac{2z_2}{z_1}=\overline{\left(\frac{2z_2}{z_1}\right)}+\frac{2z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}\left(\frac{2z_2}{z_1}\right),$$

επομένως $w\in\mathbb{R}$.

β) $|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=\frac{2\cancel{|z_1|}}{\cancel{|z_2|}}+\frac{2\cancel{|z_2|}}{\cancel{|z_1|}}=4$, επομένως

$|w|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4$.

Β3. $w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$.

Επομένως $A(z_1)$, $B(-z_1)$, $\Gamma(2iz_1)$

$(B\Gamma)=|-z_1+2iz_1|=|z_1(-1+2i)|=|z_1||-1+2i|=|z_1|\sqrt{5}$

$(A\Gamma)=|z_1+2iz_1|=|z_1(1+2i)|=|z_1||1+2i|=|z_1|\sqrt{5}$, άρα $(B\Gamma)=(A\Gamma)$,

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Γ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Για κάθε $x<0 \Rightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,0]$, επομένως $f((-\infty,0]) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (0,1]$

και για κάθε $x>0 \Rightarrow f'(x)<0$ άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, επομένως $f([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] = (0,1]$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = (0,1]$.

Γ2. Επειδή $f(\mathbb{R}) = (0,1]$, τότε $f(x) \le 1$ (1) και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, τότε

$$(1) \Leftrightarrow f(f(x)) \ge f(1) \Leftrightarrow f(f(x)) \ge \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Γ3. Επειδή $f(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, τότε από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = f'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Γ4. Έστω $(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf είναι $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από $(3,0)$, τότε:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(3-x_0) \Leftrightarrow -\frac{1}{\cancel{\sqrt{x_0^2+1}}} = -\frac{x_0}{(x_0^2+1)\cancel{\sqrt{x_0^2+1}}}(3-x_0) \Leftrightarrow$$

$$x_0^2+1 = 3x_0 - x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 3x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = \frac{1}{2}\right)$$

Η εφαπτομένη της Cf στο $x_0 = 1$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Η εφαπτομένη της Cf στο $x_0 = \dfrac{1}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5\sqrt{5}}x + \frac{12}{5\sqrt{5}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x} \Leftrightarrow xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}$$

Στο $x_0=0$ επειδή η f είναι συνεχής έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0-0=0$$

Γιατί: $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x| \Leftrightarrow -|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|$ και επειδή $\lim_{x\to 0}|x|=0$, από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Δ2. Για κάθε $x \neq 0$ $f'(x)=\frac{x\eta\mu x-1+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}-\eta\mu\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\eta\mu\frac{1}{x}$.

Δ3. Για κάθε $x>0$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\leq\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$ και επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$
- για το $\lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}$, θέτουμε $\frac{1}{x}=u$ και επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, τότε $\lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$, επομένως η ευθεία $y=-1$ είναι ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

Δ4. $$f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{\pi}\eta\mu\pi=\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right)>0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 < 0$, επομένως υπάρχει $\kappa > \frac{1}{\pi}$ ώστε $f(\kappa) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi}, \kappa\right]$ από το θεώρημα του Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(\frac{1}{\pi}, \kappa\right) \subseteq \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.