ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Απαντήσεις στα Μαθηματικά & στοιχεία Στατιστικής (γενικής παιδείας)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. $\alpha \to \Lambda \quad \beta \to \Sigma \quad \gamma \to \Sigma \quad \delta \to \Lambda \quad \varepsilon \to \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$, επομένως πρέπει

$$\left.\begin{matrix} f(-2)=0 \\ f'(-2)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -8\alpha+4\beta-4=0 \\ 12\alpha-4\beta=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=1 \\ \beta=3 \end{matrix}\right.$$

Β2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ έχουμε $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -2$, το $f(-2) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = -4$.

Β3. $f''(x) = 6x + 6$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το $f'(-1) = -3$, επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο σημείο της $M(-1, f(-1))$, δηλ. $M(-1,-2)$.

	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Β4. $$\lim_{x\to-2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to-2} \frac{(3x^2+6x)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{3x\cancel{(x+2)}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = 3\sqrt{5}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω c το πλάτος των κλάσεων, τότε επειδή η μικρότερη παρατήρηση είναι 0, οι πέντε κλάσεις θα είναι της μορφής: $[0,c)$, $[c,2c)$, $[2c,3c)$, $[3c,4c)$ και $[4c,5c)$.

Επειδή το κέντρο της $5^{ης}$ κλάσης είναι 18, τότε $\frac{4c+5c}{2}=18 \Leftrightarrow c=4$.

Γ2. $\omega_5=36^o \Leftrightarrow 360f_5=36 \Leftrightarrow f_5=0{,}1$

$$\frac{N_1}{4}=\frac{N_2}{9}=\frac{N_3}{15}=\frac{N_4}{18} \Leftrightarrow \frac{f_1}{4\nu}=\frac{f_1+f_2}{9\nu}=\frac{f_1+f_2+f_3}{15\nu}=\frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{18\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1}{4\nu}=\frac{f_1+f_2}{9\nu}=\frac{f_1+f_2+f_3}{15}=\frac{1-f_5}{18} \Leftrightarrow \frac{f_1}{4}=\frac{f_1+f_2}{9}=\frac{f_1+f_2+f_3}{15}=\frac{0{,}9}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1}{4}=\frac{f_1+f_2}{9}=\frac{f_1+f_2+f_3}{15}=\frac{1}{20} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1=\frac{4\nu}{20\nu}=0{,}2 \\ f_1+f_2=\frac{9}{4}f_1 \Leftrightarrow f_2=0{,}25 \\ f_1+f_2+f_3=\frac{15}{4}f_1 \Leftrightarrow f_3=0{,}3 \end{cases}$$

$f_4=1-f_1-f_2-f_3-f_5 \Leftrightarrow f_4=0{,}15$

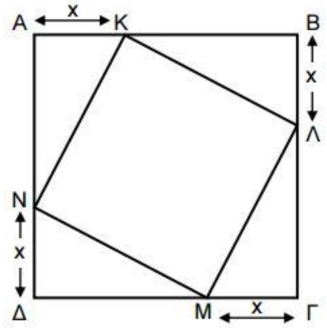
Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετικές συχνότητες f_i%**
$[0,4)$	2	20
$[4,8)$	6	25
$[8,12)$	10	30
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
	Σύνολο	100

Γ3. $\frac{1}{4}f_1\%+f_2\%+\frac{1}{2}f_3\%=45\%$

Γ4.

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετικές συχνότητες f_i%**	**$x_i\ f_i$%**
$[4,8)$	6	25	150
$[8,12)$	10	30	300
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
	Σύνολο	80	840

$$\overline{x} = \frac{1}{80}\sum_{i=2}^{5} x_i f_i \% = \frac{840}{80} = 10,5 \text{ ώρες}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $(AN) = 4 - x$

$(KN)^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} x^2 + (4-x)^2$

$E(x) = (KN)^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2(x^2 - 4x + 8)$, $x \in (0,4)$

Δ2. $E'(x) = 4x - 8$, για κάθε $x \in (0,2]$ είναι $E'(x) < 0$ δηλαδή η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$ και για κάθε $x \in [2,4)$ είναι $E'(x) > 0$ δηλαδή η E είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4)$, επομένως, παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 2$.

Δ3. **α)** $y_i = E(x_i) \Leftrightarrow y_i = 2x_i^2 - 8x_i + 16 \Leftrightarrow x_i^2 = \frac{1}{2}y_i + 4x_i - 8$

$$\overline{x_i^2} = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} x_i^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19}\left(\frac{1}{2}y_i + 4x_i - 8\right) = \frac{1}{2}\overline{y} + 4\overline{x} - 8 = 4,01.$$

β) $$s^2 = \frac{1}{19}\left\{\sum_{i=1}^{19} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{19} x_i\right)^2}{19}\right\} = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{19} x_i\right)^2}{19^2} = \overline{x_i^2} - (\overline{x})^2 = 0,01$$

$s = \sqrt{s^2} = 0,1$ είναι ομοιογενές.

γ) Έστω $x_1 < x_2 < \ldots < x_{19}$, επειδή $x_i^2 \geq 4 \overset{x_i > 0}{\Leftrightarrow} x_i \geq 2$.

Η διάμεσος των 19 παρατηρήσεων είναι 2, τότε $x_{10} = 2$, επομένως $x_i \geq x_{10}$, άρα: $A = \{x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{19}\}$

$E(x_i) \leq 8 \Leftrightarrow 2(x_i^2 - 4x_i + 8) \leq 8 \Leftrightarrow (x_i - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_i = 2$,

άρα: $B = \{x_{10}\}$

$A \cup B = A$, άρα: $\Gamma = A' = \{x_1, x_2, \ldots, x_9\}$.

Επομένως: $P(A) = \frac{10}{19}$, $P(B) = \frac{1}{19}$ και $P(\Gamma) = \frac{9}{19}$.