Απαντήσεις στα Μαθηματικά & στοιχεία Στατιστικής (γενικής παιδείας)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. **$\alpha \to \Lambda$ $\quad \beta \to \Sigma$ $\quad \gamma \to \Lambda$ $\quad \delta \to \Lambda$ $\quad \varepsilon \to \Sigma$**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{3},\ x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\right)$

Επειδή $A\cap B\subset A\subset A\cup B$, τότε $P(A\cap B)<P(A)<P(A\cup B)$, επομένως: $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Β2. $P(A'-B')=P(B-A)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Β3. $P(E)=P((A-B)\cup(B-A))=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Β4. $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{2}{3},\ x=-\frac{1}{3}\right)$ και επειδή $0\le P(\Gamma)\le 1$, τότε: $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Έστω Β, Γ ασυμβίβαστα, τότε:

$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1$, που είναι άτοπο, άρα τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του 10 είναι 10%, τότε $f_1\%=10\%$.

Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%, τότε $f_5\% = 30$.

$\alpha_3 = 108^o \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^o = 108^o \Leftrightarrow f_3\% = \frac{108}{360}100\% \Leftrightarrow f_3\% = 30$.

$10 + f_2\% + 30 + f_4\% + 30 = 100 \Leftrightarrow f_2\% = 30 - f_4\% \ (1)$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{9 \cdot 10 + 11 \cdot f_2\% + 13 \cdot 30 + 15 \cdot f_4\% + 17 \cdot 30}{100} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11 \cdot f_2\% + 15 \cdot f_4\% = 410 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 11(30 - f_4\%) + 15 \cdot f_4\% = 410 \Leftrightarrow f_4\% = 20$$

$(1) \Rightarrow f_2\% = 10$

Γ2. $$s^2 = \frac{10(14-9)^2 + 10(14-11)^2 + 30(14-13)^2 + 20(14-15)^2 + 30(14-17)^2}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{660}{100} \Leftrightarrow s^2 = 6,6 \Leftrightarrow s \simeq 2,57$$

$CV = \frac{s}{\bar{x}} \simeq \frac{2,57}{14} > 0,1$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. $$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} \nu_i x_i \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{4} \nu_i x_i + \nu_5 x_5\right) \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17 f_5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\nu = 1780 + 5,1\nu \Leftrightarrow 8,9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200.$$

Γ4. $$\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{s_\alpha} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{s_\alpha}\alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$$

Επομένως $\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} \Leftrightarrow \bar{\beta} = 0$ και $s_\beta = \frac{1}{s_\alpha}s_\alpha \Leftrightarrow s_\beta = 1$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

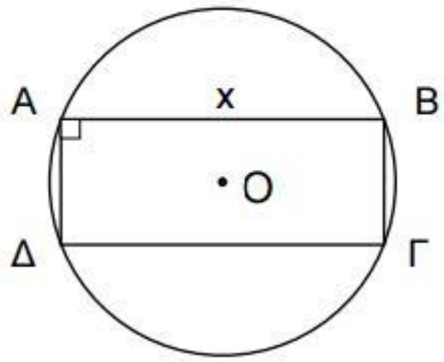
Δ1. Επειδή $\Delta\hat{A}B = 90^o$, η ΒΔ είναι διάμετρος, επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$(A\Delta)^2 = (B\Delta)^2 - (AB)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A\Delta) = \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$,

Επομένως: $f(x) = (A\Delta) \cdot (AB) \Leftrightarrow$

$f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.



Δ2. $$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = 2\frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Η f γίνεται μέγιστη για $x=5\sqrt{2}$ και τότε

$$\left(\mathrm{A}\Delta\right)=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=5\sqrt{2}=\left(\mathrm{AB}\right)$$

Επομένως το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

x	0		$5\sqrt{2}$		10
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Δ3. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{98}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\right)=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{98}\frac{98}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ4. Επειδή $0<P(A-B)\le 1$ και $0<P(A)\le 1$, τότε

$$0<\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}\le\frac{1}{\sqrt{100-1}}<1,\text{ όμοια } 0<\frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}<1$$

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-(P(A-B))^2}\le P(A)\sqrt{100-(P(A))^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}P(A-B)\le P(A)\text{ ισχύει αφού } A-B\subseteq A.$$