<u>Απαντήσεις στα Μαθηματικά κατεύθυνσης Ημερήσια 2015</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. $\alpha \to \Lambda \quad \beta \to \Sigma \quad \gamma \to \Lambda \quad \delta \to \Sigma \quad \varepsilon \to \Sigma$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4|z|^2 - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3|z|^2 = 12 \Leftrightarrow |z| = 2$,

επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Β2. **α)** $|z_1| = |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = 4 \ (1)$

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \overset{(1)}{=} \frac{2\frac{4}{\bar{z}_1}}{\frac{4}{\bar{z}_2}} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{2z_2}{z_1} = \overline{\left(\frac{2z_2}{z_1}\right)} + \frac{2z_2}{z_1} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{2z_2}{z_1}\right),$$

επομένως $w \in \mathbb{R}$.

β) $|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = \frac{2\cancel{|z_1|}}{\cancel{|z_2|}} + \frac{2\cancel{|z_2|}}{\cancel{|z_1|}} = 4$, επομένως

$|w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$.

Β3. $w = -4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow 2z_1^{\ 2} + 2z_2^{\ 2} = -4z_1z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$.

Επομένως $A(z_1)$, $B(-z_1)$, $\Gamma(2iz_1)$

$(B\Gamma) = |-z_1 + 2iz_1| = |z_1(-1+2i)| = |z_1||-1+2i| = |z_1|\sqrt{5}$

$(A\Gamma) = |z_1 + 2iz_1| = |z_1(1+2i)| = |z_1||1+2i| = |z_1|\sqrt{5}$, άρα $(B\Gamma) = (A\Gamma)$,

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Γ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$, για κάθε $x\neq 1$ και επειδή f συνεχής στο $x_0=1$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f\left(\mathbb{R}\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}(d'H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}(d'H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Επομένως $f\left(\mathbb{R}\right)=\left(0,+\infty\right)$.

Γ2. $f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=\dfrac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x^2+1}=\dfrac{e^3}{2}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{e^3}{2}$, επειδή $\dfrac{e^3}{2}\in f\left(\mathbb{R}\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h\left(x\right)=\int_\alpha^x f\left(t\right)dt$, $\alpha>0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'\left(x\right)=f\left(x\right)$ επομένως για κάθε $x>0$ η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $\left[2x,4x\right]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(2x,4x\right)$ ώστε $h'\left(\xi\right)=\dfrac{h\left(4x\right)-h\left(2x\right)}{4x-2x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\xi\right)=\dfrac{1}{2x}\left(\int_\alpha^{4x}f\left(t\right)dt-\int_\alpha^{2x}f\left(t\right)dt\right)\Leftrightarrow f\left(\xi\right)=\dfrac{1}{2x}\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt$ (1), αλλά

$\xi<4x\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\xi\right)<f\left(4x\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{2x}\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt<f\left(4x\right)\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt<2xf\left(4x\right)$.

Γ4. Στο $x_0=0$

$g\left(0\right)=2$

$$\lim_{x\to0}g\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\int_{2x}^{4x}f\left(t\right)dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_\alpha^{4x}f\left(t\right)dt-\int_\alpha^{2x}f\left(t\right)dt}{x}\overset{\frac{0}{0}d'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(4f\left(4x\right)-2f\left(2x\right)\right)=2f\left(0\right)=2$$

Επομένως η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Για κάθε $x > 0$ $g(x) = \dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \dfrac{\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt}{x}$ που είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \dfrac{4xf(4x) - 2xf(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} =$

$$= \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt + 2x\left(f(4x) - f(2x)\right)}{x^2} > 0$$

Γιατί: $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$ από το ερώτημα Γ3 και για κάθε $x > 0$ είναι $4x > 2x \overset{\nearrow}{\Rightarrow} f(4x) > f(2x) \Rightarrow 2x\left(f(4x) - f(2x)\right) > 0$.

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$ και η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως για $x = 0$ έχουμε $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{x^2 + 1} \text{ (A)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$, από (A) είναι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0) = e^{f(0)} = 1 > 0$, τότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{(A)} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Δ2. **α)** $f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x<0 \Rightarrow f''(x)>0$ επομένως η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0 \Rightarrow f''(x)<0$ επομένως η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $P(0,0)$.

β) Επειδή η $y=x$ είναι εφαπτομένη της Cf στο $x_0=0$ και η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, τότε $x \geq f(x)$, για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως

$$E = \int_0^1 (x-f(x))dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x'\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = -\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. $$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty} d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{f^2(x)e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-f'(x)\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)e^{\int_0^x f^2(t)dt}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right) = -1\cdot 0 = 0$$

Γιατί: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)} \overset{\frac{0}{0} d'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cancel{f^2(x)}}{3\cancel{f^2(x)}f'(x)} = 0$$

και $$\lim_{x\to 0^+}\frac{-f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}} = -1.$$

Δ4. $$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right)=0 \ \text{(A)}$$

Θεωρώ $g(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right)$

g συνεχής στο $[2,3]$ και

$g(2)=3\int_0^{2} f^2(t)dt-8<0$, $g(3)=1-3\int_0^{1} f\left(t^2\right)dt>0$ γιατί:

Η $y=x$ είναι εφαπτομένη της Cf στο $x_0=0$ και η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, τότε $x\geq f(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα

- $f\left(t^2\right)\leq t^2$, για κάθε $t\in[0,1]$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε

  $t\in[0,1]$, τότε $\int_0^{1} f\left(t^2\right)dt<\int_0^{1} t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$, επομένως

  $-3\int_0^{1} f\left(t^2\right)dt>-1\Leftrightarrow g(3)>0$
- $f(t)\leq t\Leftrightarrow f^2(t)\leq t^2$, για κάθε $t\in[0,2]$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει

  για κάθε $t\in[0,2]$, τότε $\int_0^{2} f^2(t)dt<\int_0^{2} t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$, επομένως

  $3\int_0^{2} f^2(t)dt<8\Leftrightarrow g(2)<0$

  Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$